

## Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

1. Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Abbildung des folgenden Typs an:

- a) Eine bijektive Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ .
- b) Eine bijektive Abbildung  $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ .
- c) Eine bijektive Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

2. Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x},$$

und

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad g(y) = \sqrt{4 + y^2} + y.$$

- a) Bestimmen Sie Abbildungsvorschrift der beiden Verknüpfungen

$$f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

und überprüfen Sie damit  $f$  auf Injektivität und Surjektivität.

- b) Geben Sie das Urbild  $M = f^{-1} \left( \left] -\infty, \frac{3}{2} \right] \right)$  mit Hilfe geeigneter Intervalle von  $\mathbb{R}$  an und skizzieren Sie  $M$  auf der Zahlengeraden.

3. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität bzw. Surjektivität. Begründen Sie Ihre Antworten!

- a)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 3x + 4$
- b)  $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto 3x + 4$
- c)  $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$
- d)  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \mapsto (x^2 + 1, (x + 1)^2)$

4. Weihnachtsaufgabe

- a) Die StudentInnen der Vorlesung „Grundlagen der Mathematik 1“ veranstalten in diesem Jahr ein Wichteln: Jede Person steckt einer anderen Person heimlich ein Weihnachtsgeschenk zu. Es sei bekannt, daß niemand mehr als ein Geschenk bekommen hat. Zeigen Sie, daß dann jede TeilnehmerIn ein Geschenk erhalten hat.  
(Anleitung: Man betrachte eine geeignete Abbildung.)
- b) Auch die himmlischen Engel wichteln in diesem Jahr untereinander, und auch bei ihnen erhält kein Engel mehr als ein Geschenk. Kann es passieren, daß ein Engel leer ausgeht? Kann es passieren, daß unendlich viele Engel leer ausgehen? (Bekanntlich gibt es genau so viele himmlische Engel, wie es natürliche Zahlen gibt, d.h. die Menge der Engel ist gleichmächtig zu  $\mathbb{N}$ .)